

# スキルミオン——60年の進展

Keyword: スキルミオン

## 1. はじめに

この言葉は、最近よく聞くようになったと思っている人が多いかもしれないが、60年近く前に提案され、<sup>1)</sup> さらに1980年代に量子色力学(QCD)の1つの表現として大流行したテーマでもある。語源は提案(発見)者である英国人のTony Skyrme から来ている。この名前は「スカーム」と発音するのが正しいようなので、スキルミオン(Skyrmion)も本当はスカームオンであろう。「-on」は量子論、素粒子論で粒子を意味する接尾辞であるから、スキルミオンも粒子の名前ということになる。さて、どんな粒子だろうか。一言で言うと、スキルミオンは点状でなく広がった構造をもち、位相的な不変量によって安定な粒子である。まず、アナロジーによる直感的な理解を試みよう。

## 2. 位相的ソリトンの1次元模型

空間と時間が(1+1)次元系における実スカラー場 $\phi(x, t)$ の理論を考える。(適当に無次元化した表示で)ラグランジアンを $\mathcal{L} = (1/2)[(\partial_t\phi)^2 - (\partial_x\phi)^2] - (1 - \cos\phi)$ とする。このポテンシャルは周期的で、 $\phi = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ で最小値0となる。この方程式の時間に依存しない定常解が満たす非線形微分方程式 $\partial_x^2\phi = \sin\phi$ には境界条件 $\phi(-\infty) = 0, \phi(+\infty) = 2\pi$ を満たす解 $\phi(x) = 4 \tan^{-1}(e^x)$ が存在する。この解(図1)は $x=0$ の周辺に局在する有限エネルギーをもつ孤立波解(solitary wave)で、両端が固定されているためにダイナミクスの詳細にはよらない幾何学的(位相的)安定性をもち、安定粒子のように振舞うため位相的ソリトンともよばれる。

数学的には、この系の無限遠 $(-\infty, +\infty)$ を同一点とみなし、 $\phi(x)$ を $2\pi$ を法として周期的な変数とみなすと、 $\phi(x)$ は1次元単位円( $S^1$ )から同じく $S^1$ への連続写像と位相的に同一となって、ホモトピー群 $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ ( $\mathbb{Z}$ は整数の群)で示される非自明な位相構造をもっている。対応

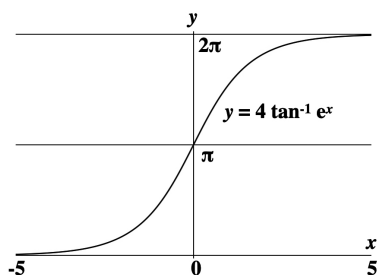


図1 (1+1)次元の孤立波解.

して有限エネルギー解は、常に整数値をとる不変量 $Q = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x\phi dx = 1/2\pi(\phi(\infty) - \phi(-\infty))$ をもつ。図1の $\phi(x)$ は $Q = +1$ の解であるため、連続変形で $Q = 0$ の真空 $\phi(x) = 0$ とつなぐことはできない。このように、連続な場の関数によって表されるとびとびの位相的不変量があると、量子ゆらぎなどの微小変動によって異なる $Q$ の状態に帰着できない安定解が存在するのである。

## 3. 核子のスキルミオン模型

位相的ソリトンをクォークとグルーオンからなるハドロンに適用し、スピン1/2をもつ核子(陽子や中性子)を表す模型としたのが元祖・スキルミオンである。数学的な構造は、基礎理論である量子色力学(QCD)のカイラル $SU(2)_R \times SU(2)_L$ 対称性とその自発的な破れ、その結果生じる質量が0の南部ゴールドストーンボゾン(パイオン)の場の理論に基づいている。(u, d)クォークからなる擬スカラーメソンであるパイオンは、3つの荷電成分(アイソスピン)に対応する3成分のスカラー場 $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ で表される。このパイオン場を低エネルギーで主要な自由度とする有効理論がスキルミオンのもととなる。変数としてユニタリ行列の場 $U = \exp(i\tau_a\phi_a/f_\pi)$ ( $\tau_a$ はアイソスピンを表すパウリ行列)をとる。 $L_\mu \equiv U^\dagger \partial_\mu U$ を用いると、Skyrmeが提案した理論はラグランジアン

$$\mathcal{L} = -\frac{f_\pi^2}{4} \text{Tr}[L_\mu L^\mu] + \frac{1}{32e^2} \text{Tr}[L_\mu, L_\nu]^2, \quad (1)$$

で与えられる。この系にも $U$ がもつ周期的な構造に起因する非自明なトポロジーをもつ定常解が存在する。この解は原点を中心とする極座標系の動径方向の単位ベクトル $e_r$ を用いて、ヘッジホッグ(ハリネズミ)とよばれる $\phi_a(r) = (e_r)_a F(r)$ の形で与えられ、 $F(r=0) = n\pi, F(r \rightarrow \infty) = 0$ の境界条件を満たす(図2(左))。一点とみなした無限遠で $U = 1$ となる有限エネルギーの条件から、 $\pi_3(SU(2)) = \mathbb{Z}$ で

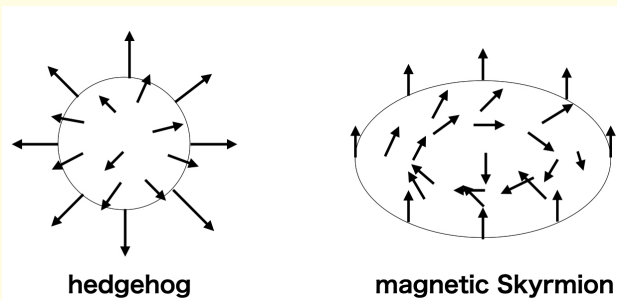


図2 ヘッジホッグスキルミオンと磁気スキルミオン.

表される位相的構造をもつ。対応して位相不変量(巻数) $B = (1/24\pi^2) \int \epsilon_{ijk} \text{Tr}[L_i L_j L_k] d^3x$ が整数値 $n$ を取る。Skyrmeはこの巻数を核子などを数えるバリオン数であるという大胆な提案をして、この位相構造による安定性がバリオン数の保存に対応するとした。

#### 4. スキルミオンの量子論

さて、ここまでのスキルミオンは非自明な位相的構造をもつ古典解であって、まだ量子論的な粒子とみなせない。Skyrmeはヘッジホッグ解が回転対称性とアイソスピン対称性を同時に破ることに注目し、実空間とアイソスピン空間での回転運動をそれぞれ量子化して得られるスピン、アイソスピンの固有状態が核子を表すとした。このように有限の広がりをもった核子(フェルミオン)を、ボソンであるパイオン場で作り出すという先進的なアイデアは、1960年代にはかなり違和感があったと思われ、あまり注目されなかった。特に、回転によって核子のスピンとアイソスピンの半奇数値(1/2)となることは自明ではなかった。

Skyrmeの大胆な提案は20年後にWittenらによって再発見された。<sup>2)</sup> WittenはQCDの量子異常の構造を用いて、カラー数とバリオンのスピンや量子統計性に関係があることを示した。すなわち、クォークのカラー数 $N_c$ が奇数であれば、スキルミオンはフェルミオンとなり、スピンおよびアイソスピンが1/2をもつことを示したのである。現実のQCDでは $N_c=3$ だから、まさにSkyrmeの予想通りである。実は、スキルミオン模型ではカラー数はさらに重要な役割を果たしている。上記のスキルミオンの回転などの量子ゆらぎは $N_c$ が大きいと、 $1/N_c$ の高次効果として抑制されて、 $N_c$ が無限大の極限で古典解が厳密な解となる。

したがって、スキルミオンは $N_c$ が大きい極限でのQCDの有効模型であることが明らかになり、一躍脚光をあびるに至った。元祖スキルム模型はさまざまな場面へと拡張され、たとえば多核子系(原子核)をスキルミオンの集合として表すような試みも行われた。しかし、定量性を追求すると必ずしも成功とは言えない事例が増えてきて、スキルミオン研究ブームは1990年代には次第に下火となった。

#### 5. 磁気スキルミオン

物理においては、ある分野で生まれた概念が思いもかけず他の分野に適用されるということがしばしば見られる。核子の模型として大流行したスキルミオンの研究は、Wittenからさらに20年経って、全く別分野で磁性体の構造、磁気スキルミオンとして蘇ったのである。<sup>3)</sup>

磁気スキルミオンは、強磁性体の2次元系で、図2(右)のように中心にスピンドアウンの格子点があって、連続的に遠方のスピニアップに繋がった位相構造である。この系

はスピンの向きを球面 $S^2$ の1点とみなし、2次元平面の無限遠方(周辺)を1点とみなすと、 $S^2$ から $S^2$ への連続写像とみなすことができる。ちょうど、上で与えたスキルミオンの次元を3から2に1つ減らしたことに対応していて、同様の巻数を定義することができる。この磁気スキルミオンは、トポロジーによる安定性により、連続変形で壊すことができないので、磁性体中で巻数という情報をもった(準)安定な粒子として振舞うため、さまざまな応用的価値がある。多数のスキルミオンによる結晶状態を作り出してさらに安定にしたり、スピン流を用いてスキルミオンを動かして電磁誘導を起こすといった面白い現象が可能になる。

一方で、核子のスキルミオン模型と様相が違うのは、磁気スキルミオンは古典系として扱われていて、その量子化はあまり議論されていない点である。多数のスピンが関与するので、集団運動はかなり遅い運動になっていて、核子の場合のように高速回転して角運動量の固有状態を作るようなことは考えられていない。核子のスキルミオン模型でも、多スキルミオンの古典状態が結晶(的)な構造を作ることが知られていて、原子核と対応させる場合もある。ただし、核子多体系は量子ゆらぎ効果が大きいため、古典系としての記述は成功していないのが実情である。磁気スキルミオンの量子振動状態やその応用が将来可能になるかもしれないが、そのときにはまさに、Skyrmeのアイデアがハドロン物理を超えて応用されることになるだろう。

#### 6. おわりに

Tony Skyrmeは、核物理分野では、核子間の短距離核力を接触型ポテンシャルで表して、多核子系の平均場記述に適用できるようにした「スキルム力」の提案でもよく知られている。<sup>4)</sup> 核力を一点で作用するデルタ関数で表すスキルム力と核子に広がりをもたせるスキルミオンは、核子多体系としての原子核の2つの極端な見方を代表している。独創的なアイデアでこの両極の先駆者となったSkyrmeは、磁気スキルミオンを見ることはなく1987年に没した。

#### 参考文献

- 1) T. H. R. Skyrme, Proc. Roy. Soc. London **260**, 127 (1961); Nucl. Phys. **31**, 556 (1962).
- 2) E. Witten, Nucl. Phys. B **160**, 57 (1979); G. S. Adkins, C. R. Nappi, and E. Witten, Nucl. Phys. B **228**, 552 (1983).
- 3) A. Bogdanov and A. Hubert, J. Magn. Magn. Mater. **138**, 255 (1994); 十倉好紀, 第63回定例仁科記念講演会講演集(2017).
- 4) T. H. R. Skyrme, Nucl. Phys. **9**, 615 (1959).

岡 真(日本原子力研究開発機構先端基礎研究センター  
oka@post.j-parc.jp)

(2020年4月26日原稿受付)